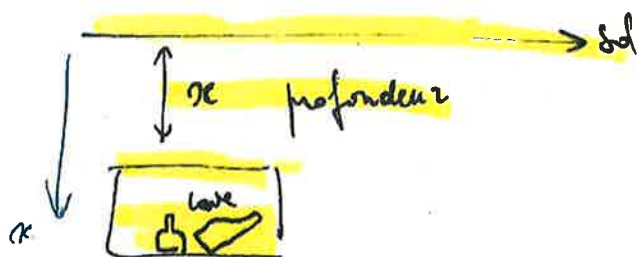


Exemple d'application de l'éq. de diffusion de la chaleur

Cave à vin : à quelle profondeur doit-elle être ?



Au sol, T varie périodiquement

(jour/nuit ; été/hiver) : mauvais pour le vin !

On peut écrire $T(x=0, t) \approx T_0 + \Delta T \cos(\omega_0 t)$

Variation périodique de
période = $\frac{2\pi}{\omega_0}$

Par ex. pour 1 jour $\omega_0 = \frac{2\pi}{24h} = 7.3 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$

• Mathématiquement, $T(x=0, t)$ est la "condition au bord" nécessaire pour la résolution de l'équation.

• Supposons de ne pas avoir des sources ($\tilde{w} = 0$)

$\Rightarrow$ l'équation est donc $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\rho c}{k} \frac{\partial T}{\partial t}$

• Trouver la solution générale est très compliqué, mais nous pouvons appliquer notre intuition : la variation ΔT sera "atténuée" dans la cave, et il y aura un déphasage, c'est à dire un retard entre les variations au sol et celles dans la cave. $\Rightarrow$ $\Delta T e^{-\alpha x}$

• Comment exprimer une atténuation (qui augmente avec la profondeur) et un déphasage (idem) ?

• On suppose une solution de la forme

$$2. : T(x, t) = T_1 + \Delta T e^{-\alpha x} \cos(\omega_0 t - \eta(x))$$

Mais $T(0, t) = T_0 + \Delta T \cos \omega_0 t \Rightarrow T_1 = T_0$ et $\eta(0) = 0$ (ou $2\pi, 4\pi, \dots$)

Procédure : on remplace $T(x,t)$ dans l'éq. de diffusion, on vérifie que ça marche, et on trouve α et $\eta(x)$.

12

$$T(x,t) = T_0 + \Delta T e^{-\alpha x} \cos(\omega_0 t - \eta(x))$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\Delta T e^{-\alpha x} \sin(\omega_0 t - \eta(x)) \omega_0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x} &= -\Delta T e^{-\alpha x} \sin(\omega_0 t - \eta(x)) \left(-\frac{d\eta}{dx}\right) + \Delta T e^{-\alpha x} (-\alpha) \cos(\omega_0 t - \eta(x)) = \\ &= \Delta T e^{-\alpha x} \left[\sin(\omega_0 t - \eta(x)) \frac{d\eta}{dx} - \cos(\omega_0 t - \eta(x)) \alpha \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &= \Delta T e^{-\alpha x} \left[-\cos(\omega_0 t - \eta(x)) \left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2 + \sin(\omega_0 t - \eta(x)) \frac{d^2 \eta}{dx^2} - \alpha \sin(\omega_0 t - \eta(x)) \frac{d\eta}{dx} \right] \\ &\quad + \Delta T e^{-\alpha x} (-\alpha) \left[\sin(\omega_0 t - \eta(x)) \frac{d\eta}{dx} - \cos(\omega_0 t - \eta(x)) \alpha \right] = \\ &= \Delta T e^{-\alpha x} \left\{ \cos(\omega_0 t - \eta(x)) \left[\alpha^2 - \left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2 \right] + \sin(\omega_0 t - \eta(x)) \left[\frac{d^2 \eta}{dx^2} - 2\alpha \frac{d\eta}{dx} \right] \right\} \end{aligned}$$

Remplaçons dans l'éq. de diffusion

$$\begin{aligned} \cancel{\Delta T e^{-\alpha x}} \left\{ \cos(\omega_0 t - \eta(x)) \left[\alpha^2 - \left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2 \right] + \sin(\omega_0 t - \eta(x)) \left[\frac{d^2 \eta}{dx^2} - 2\alpha \frac{d\eta}{dx} \right] \right\} &= \\ = -\frac{\rho c v}{k} \cancel{\Delta T e^{-\alpha x}} \sin(\omega_0 t - \eta(x)) \omega_0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \cos(\omega_0 t - \eta(x)) \left[\alpha^2 - \left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2 \right] + \sin(\omega_0 t - \eta(x)) \left[\frac{d^2 \eta}{dx^2} - 2\alpha \frac{d\eta}{dx} + \frac{\rho c v \omega_0}{k} \right] = 0$$

Ceci doit être = 0 pour toutes les valeurs de t , donc

les coefficients de $\cos(\dots)$ et $\sin(\dots)$ doivent s'annuler :

$$\alpha^2 = \left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2 \Rightarrow \frac{d\eta}{dx} = \alpha \Rightarrow \boxed{\eta = \alpha x} \quad [\eta(0) = 0 \text{ OK!}]$$

Et

$$\frac{d^2 \eta}{dx^2} - 2\alpha \frac{d\eta}{dx} + \frac{\rho c_v}{k} \omega_0 = 0 \quad ; \quad \text{mais } \frac{d\eta}{dx} = \alpha \Rightarrow \frac{d^2 \eta}{dx^2} = 0$$

$$-2\alpha(\alpha) + \frac{\rho c_v}{k} \omega_0 = 0 \Rightarrow 2\alpha^2 = \frac{\rho c_v \omega_0}{k} \Rightarrow \alpha = \sqrt{\frac{\rho c_v \omega_0}{2k}}$$

Note si $\frac{d\eta}{dx} = -\alpha \Rightarrow k\alpha^2 + \frac{\rho c_v}{k} \omega_0 = 0 \leftarrow$ pas de solution réelle

Donc $T(x,t) = T_0 + \Delta T e^{-\alpha x} \cos(\omega_0 t - \alpha x)$

Note l'atténuation augmente avec c_v et diminue avec k , ce qui est intuitif.

Ex. numérique: on veut atténuer la variation ΔT d'un facteur 10.
Profondeur = ?

$$\rho_{\text{terre}} = \frac{3g}{\text{cm}^3} = 3 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$$

$$k_{\text{terre}} = 2 \frac{\text{J}}{\text{s m}^\circ\text{C}} \quad ; \quad c_{v, \text{terre}} \approx 1000 \frac{\text{J}}{\text{kg}^\circ\text{C}}$$

$$e^{-\alpha x} = \frac{1}{10} \Rightarrow \alpha x = \ln(10) \approx 2.3$$

Donc $x = \frac{2.3}{\alpha} = 2.3 \sqrt{\frac{2k}{\rho c_v \omega_0}}$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Pour 24 h (période)
 $x = 2.3 \sqrt{\frac{2 \times 2 \times 24 \times 60 \times 60}{3 \times 10^3 \times 1000 \times 2\pi}} \approx 30 \text{ cm} \quad (!)$

) Mais une bonne cave doit éviter des variations avec les saisons

Donc pour 12 mois:

$$x = 2.3 \sqrt{\frac{2 \times 2 \times 365 \times 24 \times 60 \times 60}{3 \times 10^3 \times 1000 \times 2\pi}} \approx 5.7 \text{ m}$$

$$(\text{ou } x = 30 \text{ cm} \times \sqrt{365} = 570 \text{ cm} = 5.7 \text{ m})$$